TITLE:

確率過程量子化をめぐって(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告)

AUTHOR(S):

並木, 美喜雄

CITATION:

並木, 美喜雄. 確率過程量子化をめぐって(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告). 物性研究 1994, 62(1): 86-105

ISSUE DATE:

1994-04-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/95300

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

確率過程量子化をめぐって

早大理工　並木　美喜雄

はじめに

この研究会は非平衡系の統計力学である。したがって、私の出し物としては高エネルギー原子核衝突におけるクォーク・プラズマ物理とそれを通した粒子多重発生現象の方が適していると思ったが、世話人のご要望で確率過程量子化をとり上げる。統計力学の問題にも使える方法だが、統計力学そのものではない。なお、クォーク・プラズマ物理の話はポスターセッションにまわした。

確率過程量子化は第3の量子化法ともいうべきものである。ここでは、その歴史的背景、概要と特徴を述べた後、従来の量子化法（正準量子化、経路積分量子化）では扱いにくい特異な力学系（底なし系と Born-Infeld 場）の量子化を試みる。

1．歴史的背景

量子力学が発足したとき、原理面に確率を持ち込んだという点には多くの抵抗があった。その後６０年以上にわたって観測問題を中心に激しい対立と論争があったが、いずれも、重ね合わせの原理と確率解釈がその原因である。

一方、古典物理学ではすべての原理的法則は決定論的であり、確率は私たちが対象系のミクロ的情報を知らないために導入された現象論的なものであった。量子力学的確率もそのような形で理解されるならば、理論構成や物理的解釈も理解し易くなるだろうという期待がある。

たとえば、すべての原理的法則は古典論的な決定論であるが、背後に未知の物質（“エーテル”）があって、それによる揺動が確率でしか扱えない量子論的ゆらぎをつくるという考えである。量子力学のブラウン運動論的理解といってよい。確率過程量子化はこの考えの延長線上に乗るものだ。

自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{1}$$

（$\hbar$ はプランク定数、m は質量）において、置き換え

$$t \leftrightarrow -it \ \ ,\frac{\hbar}{2m} \leftrightarrow \alpha \tag{2}$$

を実行すれば、直ちにブラウン運動の拡散方程式が出てくる（α は拡散定数）。この対応を使えば、未知の“エーテル”中をブラウン運動する古典的粒子の挙動が量子力学的に見えるのではないか！　この発想の下に Schrödinger 自身を含めて何人かの人たちが量子力学を古典的なブラウン運動論で置き換えようとした。未知の“エーテル”を記述する力学変数をしばしば“隠れた変数”といい、この種の理論を“隠れた変数理論”という。

この方向の研究に冷水をかけたのが von Neumann のＮＯ-ＧＯ定理である。彼はある数学的前提をおいて、“隠れた変数”が存在しないことを数学的に証明した。彼の権威のためか、“隠れた変数理論”の研究は一時途絶えた。しかし、この定理の数学的前提は厳しすぎたのである。戦後になって、D. Bohm はこの定理を越えて、“隠れた変数理論”の一つの可能な形を示した。

上記のシュレディンガー方程式において、

$$\psi = \sqrt{P} e^{iS/\hbar} \quad (P = |\psi|^2) \quad , \mathbf{p} = \nabla S \tag{3}$$

とおけば、厳密にニュートン方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla (V + V_Q) \tag{4}$$

と確率保存則

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} P = 0 \tag{5}$$

が導ける。ただし、

$$V_Q = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\psi|}{|\psi|} \tag{6}$$

であり、“量子力学的ポテンシャル”という。これを未知の“エーテル”からの揺動力と見れば、古典的なブラウン運動論があるだけである。Bohm はこうして量子力学を消して、古典力学に戻ろうとしたのである。ここでくわしく説明している余裕はないが、彼のこの“隠れた変数理論”は当時大きな反響を呼んだ。

量子力学を消そうを思わなくても、古典的なニュートン方程式（上式で $V_Q = 0$ とおいた式）に V_Q をつけ加えて、経過を逆に辿れば、波動関数とシュレーディンガー方程式が現れる。これは、古典力学から量子力学を組み立てる一つの量子化法—すなわち、**確率過程量子化**である。この発想を、確率過程論の数学を使ってエレガントに定式化したのが E. Nelson

の理論であった。これを Nelson の確率過程量子化という。Nelson の理論の立場にたって見ると、量子力学的な過程は数学的にはブラウン運動的な確率過程として説明することができる。

Bohm の“隠れた変数理論”も Nelson の確率過程量子化も説明学または解釈学としては大そう面白い。しかし、多体系や場などの複雑な力学系への適用は簡単ではない。方法的にも、概念的にも、予想をはるかに越えた複雑化と混乱を生じてしまう。私自身は、この方向には実り豊かな将来展望はないと思っている。これに対して、１０数年前に提案された Parisi-Wu の確率過程量子化には、現代場の量子論の要望に応えるだけの実力がある。その内容は次節以降で説明するが、くわしくは文献 [1] などを見ていただきたい。

Parisi-Wu 流の確率過程量子化の著しい特徴は、通常の時間の他に仮想的時間を導入し、それについての仮説的確率過程を設定するところにある。その熱平衡極限または長時間極限が量子力学（または場の量子論）を与えるように設計するのである。背景には、D 次元量子系は揺動力をもつ $D+1$ 次元古典系に等価であるという事実がある。これはまったく新しい考えではなく、すでに先駆的な試みもあったし、Trotter 公式を使ったスピン系の量子化などがある—[1] を見ていただきたい。

Parisi-Wu 流の確率過程量子化のもう一つの特徴は、古典的な運動方程式から出発できるところにある。正準量子化では、力学の正準形式とくにハミルトニアンを与えなければ、定式化できなかった。経路積分量子化では、ハミルトニアンまで用意しないとしても、ラグランジュアンを与えなければ定式化できなかった。確率過程量子化を採用するならば、原理的には、ハミルトニアンもラグランジュアンも不要であり、運動方程式を与えさえすればよい。だから、原理的には、非ホロノーム系の量子化も可能である。確率過程量子化が非可換ゲージ場の量子化で威力を発揮した理由もそこにある。これも、くわしくは、文献 [1] を見ていただきたい。

さらに、ミクロカノニカル量子化法にも触れないわけにはいかない。これは、D 次元量子系は決定論的な運動をする $D+1$ 次元古典系に等価であるという（確率過程量子化法よりも）かなりドラスティックな発想からはじまる。では、“量子的ゆらぎ”はどこから出てくるのか？　この理論では、その根源を古典系の（非線形性による）カオス現象に求めるのである。しかし、私の知る限りでは、この方式が量子力学を再現するという完全な証明はない。まず第一に、線形系または自由場の量子化は

可能かという疑問が出てくる。線形系にはカオスは出てこないというのが常識だからだ。しかし、不思議なことに、力学系を離散化して数値計算によってミクロカノニカル量子化法を実行する際、離散化によるバラツキがParisi-Wu 型の確率過程量子化の揺動力に似た効果を生み出すのである。この効果によって、ミクロカノニカル法が実用的になったと私は考えている。現在、大規模な場の量子論的な数値計算は、この方式とParisi-Wu 流の確率過程量子化の混合方式をとって実行されている。実際的にも原理的にも面白い問題だ。

なお、Bohm　や Nelson の理論では、はじめに述べたシュレディンガー方程式からの拡散方程式の導出と違って、虚数時間を導入することなく実数時間をそのまま用いている。これに対して、通常の Parisi-Wu 流の確率過程量子化やミクロカノニカル法は、後で述べる数学的理由から、虚数時間（つまり、ミンコフスキー時空ではなくユークリッド時空）を用いている。ただし、虚数時間の利用は確率過程量子化にとって本質的なものではない。実際、ミンコフスキー時空を保持したままの確率過程量子化も可能である（[1] 参照)。

さて、量子力学への確率過程論的アプローチとしは、古くから Wigner 分布関数があった。しかし、これは正定値ではなく、確率分布関数として説明することはできなかった。また、相空間の局部平均をとった Husimi 分布関数もあって、量子化カオスの研究に使われた。なお、最近では、相空間での確率過程量子化も工夫されている。

2．確率過程量子化のあらまし

さて、量子力学は力学量の期待値もしくは遷移確率振幅を計算する処方を与えなければならない。経路積分量子化では、期待値もしくは遷移確率振幅は $\exp[iS[q(x)]/\hbar]$ を測度とする汎関数積分（ファインマン積分）によって与えられる。ただし、$q(x)$ は時空座標 x の関数である力学量、$S[q]$ はその汎関数である作用を表す。よく知られているように、この汎関数積分は数学的には well-posed ではない。そのため、時空座標の時間成分を解析接続して（$x_0 \to -ix_0$）ミンコフスキー時空からユークリッド時空に移る。その場合の作用を同じ記号 $S[q]$ で書けば、力学量の期待値もしくは遷移確率振幅は汎関数積分

$$< G >= C \int G(q) \exp[-S[q]/\hbar] \mathcal{D}q \tag{7}$$

によって与えられる（C は規格化定数)。確率過程量子化はこの量を計算する一つの処方を与えようとするものである。

そこで、力学量 $q(x)$ が通常の時空座標 x の他に、まったく別の仮想的時間 t にも依存するとして、$q(x,t)$ と書き、その依存性について ランジュバン方程式

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta S[q]}{\delta q(x)}|_{q=q(x,t)} + \eta(x,t) \tag{8}$$

を設定する。ただし、$\eta(x,t)$ は次のような統計的性質をもつ揺動力である：

$$< \eta(x,t) >= \quad 0 \quad , \tag{9}$$

$$< \eta(x,t)\eta(x',t') > \; = \; 2\alpha\delta(x-x')\delta(t-t') \; . \tag{10}$$

$< \cdots >$ は η についての集団平均を意味する。これは典型的な Wiener-Markoff 的な確率過程である。

このランジュバン方程式を解けば、$q(x,t)$ は η の関数または汎関数として求められる。したがって、q の関数または汎関数である力学量 $G(q)$ は η の関数もしくは汎関数として得られる。これを等式

$$\int G(q)\Phi[q,t]\mathcal{D}q =< G(q(x,t) > \tag{11}$$

によって確率分布汎関数 $\Phi[q,t]$ に移せば、$\Phi[q,t]$ はフォッカー・プランクの方程式

$$\frac{\partial \Phi[q,t]}{\partial t} = \hat{F}\Phi[q,t] \tag{12}$$

を満足することが分かる。ただし、

$$\hat{F} = \alpha \int dx \frac{\delta}{\delta q(x)} \{ \frac{\delta}{\delta q(x)} + \frac{1}{\alpha}\frac{\delta S}{\delta q(x)} \} \; . \tag{13}$$

この方程式は、ランジュバン方程式のドリフト力 $-(\delta S/\delta q)_{q=q(x,t)}$ が減衰力であるとき、$t \to \infty$ で熱平衡極限

$$\Phi_{\rm eq}[q] = C \exp(-\frac{1}{\alpha}S[q]) \tag{14}$$

をもつ（C は規格化定数）。したがって、(11) は、$\alpha = \hbar$ であるならば、$t \to \infty$ において経路積分の式 (7) を与える。これが確率過程量子化の処方箋である。

この処方箋を場の理論的プロパゲーターに適用してみよう。経路積分法によるプロパゲーターの定義式は

$$\Delta(x-x') = C \int q(x)q(x') \exp(-\frac{1}{\hbar}S[q])\mathcal{D}q \tag{15}$$

であるから、確率過程量子化ではランジュバン方程式を解いて、まず相関関数の定常極限

$$D(x-x',t-t') = \lim_{t,t'\to\infty : t-t'=\text{fixed}} < q(x,t)q(x',t') > \tag{16}$$

を求め、

$$\Delta(x-x') = D(x-x',0) \tag{17}$$

とおけばよい。

自由中性スカラー場の場合で試してみよう。ユークリッド化した作用は

$$S[\phi] = \int d^4x\phi(x)(-\Box + m^2)\phi(x) \tag{18}$$

$$= \int d^4k\tilde{\phi}(k)(k^2+m^2)\tilde{\phi}(k) \tag{19}$$

で与えられる。これからは $q(x)$ の代わりに $\phi(x)$ と書く。m は粒子質量、$\tilde{\phi}(k)$ は $\phi(x)$ のフーリエ変換である。確率過程量子化の処方箋にしたがって、ランジュバン方程式を設定すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(k,t) = -(k^2+m^2)\tilde{\phi}(k,t) + \tilde{\eta}(k,t)\ ; \tag{20}$$

$$< \tilde{\phi}(k,t) >= 0\ ,\quad < \tilde{\phi}(k,t)\tilde{\phi}(k',t') >= \delta(k-k')\delta(t-t') \tag{21}$$

となるから、

$$D(x-x',t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2+m^2} e^{ik(x-x')-(k^2+m^2)|t-t'|} \tag{22}$$

が得られる。これからただちに、よく知られた自由場のファインマンプロパゲター

$$D(x-x',0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2+m^2} e^{ik(x-x')} = \Delta(x-x') \tag{23}$$

が出てくる。この計算経過は、従来の正準量子化や経路積分量子化に比べてみても、はるかに簡単だといえるだろう。場の量子論について多くの修練を経ない若い学生でも直ちに計算できるほどのものである。そこに確率過程量子化の第一の利点がある。

よく知られているように、プロパゲーターの漸近形から、次のようにして基底状態と第一励起状態とのエネルギー差、すなわち、場の量子論では粒子質量を求めることができる：

$$\Delta(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \text{const.}\exp(-m|x|)\ . \tag{24}$$

これを自由場のプロパゲーターで見れば、

$$D(x,0) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \frac{m^2}{16\pi^3}\left(\frac{2\pi}{m|x|}\right)^{3/2} \exp[-m|x|] \tag{25}$$

となる。これと同等の情報は時空座標の漸近形だけでなく、仮想時間の漸近形からも得られることに注意しておきたい。すなわち、

$$D(0,t) \overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} \frac{m^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{m^2|t|}\right)^2 \exp[-m^2|t|] \tag{26}$$

を見ればよい。自由度を一つ増やしたことの利点があったわけだ。いずれも自由場の場合だが、相互作用のある場合でも、同じような議論ができる（文献 [1] 参照）。

ところで、確率過程量子化の利点はそれだけではない。Parisi-Wu がこの量子化を試みた第一の理由は、非可換ゲージ場の量子化におけるゲージ固定の問題の簡単化にあったのである。いうまでもなく、非可換ゲージ場を量子化するにはゲージ固定が不可欠のことと考えられていたし（それは決して間違っていない）、その実行は簡単な話ではなかった。確率過程量子化を使えば、それを大幅に簡単化できると、Parisi-Wu は考えた。その間の事情をまとめておこう。くわしくは、やはり文献 [1] を見ていただきたい。

1. Parisi-Wu 以前の状況：通常のゲージ固定をするとゲージ不変性やユニタリティが破壊されることは早くから知られていた。それを救うためには、摂動計算の枠内でいえば、後で Faddeev-Popov 効果と呼ばれる項をつけ加えなければならなかった。Faddeev と Popov は特殊なゴースト場を導入することによってこの問題を解決し、Faddeev-Popov 効果を導いたのである。理論形式は経路積分量子化であった。Kuogo-Ojima はこの考えを正準量子化の枠内で定式化するのに成功した。見事な業績だった。しかし、これらのゴースト場はなんとも奇妙な顔つきをしていたし、理論形式も大そう複雑だった。

2. Parisi-Wu の指摘：Parisi-Wu は確率過程量子化を用いれば、(i) ゲージ固定をしなくてもランダウゲージのプロパゲーターが得られることを示し、(ii) ゴースト場を導入しなくても、Faddeev-Popov 項が自動的に出てくると推測した。

3. 私たちのグループの分析：(i) に関しては、彼らの計算が縦波成分の（仮想時間についての）初期値をゼロとしていることを指摘し、そ

の分布を取り入れれば、ゲージパラメーターが入ることを示した。すなわち、やはりゲージ固定が必要であること、彼らの求めたランダウゲージのプロパゲーターはそのゲージパラメーターをゼロとおいた結果に過ぎないわけである。(ii) に関しては、彼らの推測が正しかったことを摂動計算で示した。

4. その後の展開：Zwanziger はフォッカー・プランク方程式を使って、ゲージ不変性とユニタリティを満たす確率過程量子化的ゲージ固定を定式化したが、私たちのグループは独立にそれをランジュバン方程式によって実現した。このゲージ固定は正準形式には馴染まない非ホロノーム的拘束条件であり、確率過程量子化によってはじめて実行可能な方式であることを示した。

5. 形式的整備：確率過程量子化の理論体系を $D+1$ 次元場の量子論として定式化し、$D+1$ 次元の演算子理論や経路積分理論を導入して、形式と内容の整備と吟味を進めた。

このように紹介してゆくとキリがないが、もう二つだけつけ加えておこう。

1. 量子異常性：場の量子論にはしばしば量子異常性が現れ、その取扱いに神経を使う。ランジュバン方程式の確率過程的性格は、数学的正確には、伊藤型の確率微分方程式として書き表せるが、その微分は単純なライプニッツの公式にしたがわず、余分な項がつけ加わる。私たちのグループはその余分な項が物理的には量子異常性を表していることに気づき、カイラル異常性とコンフォーマル異常性を求めた。これは量子異常性を導出するもっとも簡単な方法である。

2. 数値シミュレーション：前節でも述べたように、確率過程量子化は場の量子論における大規模な数値計算にもっとも適している方法の一つである。

確率過程量子化の成果はあまりにも多いので、くわしい内容を知るには、文献 [1] とそこに挙げてある諸論文を読んでいただく以外にはない。この報告では、最近進行中の新しい試み―従来の正準量子化や経路積分量子化では扱いにくい力学系の量子化―を説明する。

3．底なし系の量子化

さて、確率過程量子化は、ランジュバン方程式 (8) と揺動力に対する統計的性質 (9) (10) によって記述される仮説的確率過程を設定し、その

熱平衡極限（または長時間極限）としてファイマン積分 (7) を求めようとするものであった。

しかし、同じ量子力学（ファイマン積分 (7)）を与えるランジュバン方程式は必ずしもただ一つではない。たとえば、同じ統計的性質 (9) (10) の揺動力 $\eta(x,t)$ をもつ一般的ランジュバン方程式（カーネル型ランジュバン方程式ともいう）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) &= -\int dx' K(x,x';\phi)\frac{\delta S}{\delta\phi(x',t)} + \int dx' \frac{\delta K(x,x';\phi)}{\delta\phi(x',t)} \\ &\quad + \int dx' G(x,x';\phi)\eta(x',t) \end{aligned} \tag{27}$$

を考えよう（簡単のため $\alpha = \hbar = 1$ とおいた)。カーネル $K(x,x';\phi)$ が

$$K(x,x';\phi) = \int dx" G(x,x";\phi)G(x",x';\phi) \tag{28}$$

のように分解可能であれば（関数 G は実数であるとしよう：このとき (28) はカーネルの正値性を表す)、対応するフォッカー・プランクの方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi[\phi,t] &= \int dx \int dx' \frac{\delta}{\delta\phi(x)} K(x,x';\phi) \\ &\qquad \left[\frac{\delta}{\delta\phi(x')} + \frac{\delta S}{\delta\phi(x')}\right]\Phi[\phi,t] \end{aligned} \tag{29}$$

となる。したがって、$S[\phi]$ が“底”をもち、ϕ が大きくなるにつれて正値をとってどこまでも大きくなるならば、$t\to\infty$ で同じ熱平衡極限 (14) が実現する。カーネル $K(x,x';\phi)$ の如何にかかわらずである！ すなわち、$K(x,x';\phi)$ のとり得る数だけのランジュバン方程式 (27) が存在し、いずれも同じ量子力学（ファイマン積分）を与える。確率過程量子化には、この余裕があるのだ—他の量子化法にはない。

カーネルをもっと簡単にしておこう：

$$K(x,x';\phi) = \delta(x-x')\overline{K}[\phi] \tag{30}$$

$$\text{すなわち、}\quad G(x-x';\phi) = \delta(x-x')\overline{K}[\phi]^{1/2} \tag{31}$$

ただし、$\overline{K}[\phi]$ は ϕ の正値汎関数であるとした。このとき、ランジュバン方程式 (27) とフォッカー・プランクの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) = -\overline{K}[\phi]\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \frac{\delta\overline{K}[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \overline{K}[\phi]^{1/2}\eta(x,t)\ , \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi[\phi,t] = \hat{F}\Phi[\phi,t]\ , \tag{33}$$

$$\text{ただし、}\quad \hat{F} = \int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\overline{K}[\phi]\left[\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}\right]\ . \tag{34}$$

と書くことができる。

ここで

$$S_-[\phi] \equiv S[\phi] - \ln\overline{K}[\phi] \tag{35}$$

とおけば、ランジュバン方程式とフォッカー・プランク演算子は

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) = -\overline{K}[\phi]\frac{\delta S_-[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \overline{K}[\phi]^{1/2}\eta(x,t)\ , \tag{36}$$

$$\hat{F} = \int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left[\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta S_-[\phi]}{\delta\phi(x)}\right]\overline{K}[\phi]\ . \tag{37}$$

となる。

さらに、次式で与えられる変換、$\hat{F}\to\hat{\overline{F}}, \Phi\to\overline{\Phi}, t\to\tau$ を実行しよう:

$$\hat{\overline{F}} = \hat{F}\overline{K}^{-1}[\phi]\ , \tag{38}$$

$$\overline{\Phi}[\phi,\tau(t)] = \overline{K}[\phi]\Phi[\phi,t]\ , \tag{39}$$

$$\tau(t) = \overline{K}[\phi]t\ . \tag{40}$$

$\overline{\Phi}$ に対する新しいフォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{\Phi}[\phi,\tau] = \hat{\overline{F}}\,\overline{\Phi}[\phi,\tau]\ , \tag{41}$$

$$\hat{\overline{F}} = \int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left[\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta S_-[\phi]}{\delta\phi(x)}\right] \tag{42}$$

となる。これは作用汎関数 $S_-[\phi]$ をもつ標準型フォッカー・プランク方程式に他ならない((12) (13) を見よ)。したがって、長時間極限は

$$\overline{\Phi}_{\rm eq} = {\rm const.}\exp[-S_-[\phi]] \tag{43}$$

であり、これを (39) によって元の分布に戻せば

$$\Phi_{\rm eq} = {\rm const.}\exp[-S[\phi]] \tag{44}$$

となり、(14) に一致する。当然の話だ。

では、なぜ当然の話をしたか？ この筋書きを "底なし系" の量子化に使いたいからである。"底なし系" とは、ϕ が大きくなるにつれて、$S[\phi]$ が

負の値をとりながら底なしに大きくなる系のことをいう。このとき、通常のランジュバン方程式 (8) には安定な長時間極限は存在しない。強引にフォッカー・プランクの方程式 (12) をつくれば、長時間極限（そんなものはないが）に相当する形式解 (14) はϕ についての積分が発散し、規格化不可能となる。

この問題の一つの処理法として、カーネル型ランジュバン方程式から出発する道を採用しようというのである。いま、

$$S[\phi]=S_2[\phi]-S_4[\phi] \tag{45}$$

とおき、$S_2[\phi]$ も $S_4[\phi]$ も ϕ が大きくなるとき、正値をとって無限に大きくなり、しかも、その領域では、$S_4[\phi]$ の方が $S_2[\phi]$ よりも大きくなる場合を考える。この場合は明らかに “底なし系” である。一般的方針としては、$S_-[\phi]$ が底なしにならないように、カーネル$\overline{K}[\phi]$ を選ぶのである。たとえば、

$$\overline{K}[\phi]=\exp[-S_4[\phi]] \tag{46}$$

と選べばよい。このときは

$$S_-[\phi]=S[\phi]+S_4[\phi]=S_2[\phi] \tag{47}$$

となり、カーネル型ランジュバン方程式の与える長時間極限 (43) は

$$\overline{\Phi}_{\rm eq}={\rm const.}\exp[-S_2[\phi]] \tag{48}$$

である。元の分布 (44) に戻せば、

$$\Phi_{\rm eq}={\rm const.}\exp[-(S_2[\phi]-S_4[\phi])] \tag{49}$$

が得られる。これは元のランジュバン方程式の形式解だが、規格化不可能であり、本来無意味なものであった。

具体的な例で示そう。典型的な例としては

$$S_2[\phi] = \int dx\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2\right], \tag{50}$$

$$S_4[\phi] = \int dx\left[\frac{1}{4}\lambda\phi^4\right] \quad (\lambda>0) \tag{51}$$

で与えられる底なし ϕ^4 理論がある。$S[\phi]$ を ϕ の関数と見れば、二瘤らくだの背に似ている。元のランジュバン方程式で記述される確率過程は、

瘤の中間点を初期値にとれば、しばらく瘤の間を徘徊した末外へ出て、無限大に向かって加速しながら突っ走るだろう。しかし、上記の方法で得られたカーネル型ランジュバン方程式 (36) の与える確率過程はまったく違う。その具体形は

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) = -e^{-S_4}\frac{\delta S_2}{\delta\phi(x,t)} + e^{-S_4/2}\eta(x,t) \tag{52}$$

であるが、瘤の外へ出て $S_4[\phi]$ がどんどん大きくなるにつれて、右辺のドリフト項も揺動力も急速にゼロになり、ϕ は一定値に近づく。この事情を具体的に見るため、私たちのグループはこの方程式をもっと簡単化し、かつ離散化して数値解法を試みた。その結果、瘤の中間点から出発した ϕ の軌跡は瘤の付近で停滞し、元のランジュバン方程式のように無限大に向かって突っ走るようなことはない。この事情は時間尺度の変換 (40) によって理解できるだろう。くわしくは文献 [2] を見ていただきたい。

さて、このようにして“底なし系”の量子化を試みようとする理由は何か？　底なし ϕ^4 理論だけではあまり面白くない。大それた野心をいえば、重力場の量子化が実行したいのである。もっとも、重力場を量子化してどのような物理量を計算すればよいのか、そしてそれがどんな意味をもつのか、私には皆目分からない。どなたか教えて下されば幸いである。

私たちのグループは、重力場周辺の簡単なモデルとして“マトリックスモデル”をとりあげて、その確率過程量子化を行った。くわしくは文献 [2] を参照されたい。

4．Born-Infeld 場の量子化

次にとりあげる問題は Born-Infeld 場の確率過程量子化である。Born-Infeld 場といっても今の若い人たちは知らないだろう。戦前の古い話だが、Born と Infeld は古典電磁場に対して非線形理論を提案した。この理論は Heisenberg の要望に応えて、長さの次元をもつ普遍定数（universal length という）を導入し、それがゼロの極限で非線形性が消えて、通常のマックスウエル理論に戻るように工夫した。最大の利点は点電荷の静電場が $r=0$ の点で発散しないこと、すなわち、点電荷の静電自己エネルギーが有限になることである。そのため、発散のない finite field theory が可能になるのではないかという期待が生まれた。しかし、致命的とも思われる欠点—量子化ができないという欠点があった。そのため、場の量子論特有の発散があるのかないのか、吟味することもできないまま、忘れられてしまった。

正準量子化を行うとき、ラグランジュアンを場の量の時間導関数で微分して正準運動量を定義し、ルジャンドル変換によって、ハミルトニアンを含む力学量を場の量と正準運動量の関数として構成する。これを力学の正準形式という。ここまでは古典論であり、この正準形式はBorn-Infeld場にも適用可能である。量子論への移行は、場の量と正準運動量との間に正準交換関係を設定して、それらの演算子性を決めることによって行われる。しかし、Born-Infeld 場の場合は、その複雑な非線形性のため、演算子量のルジャンドル変換を行うことはできない—少なくとも極めて困難である。これが Born-Infeld 場を量子化できなかった事情である。

では、ファイマン積分法ではできないか？　この量子化はc数だけを使う量子化法だから、演算子方程式を解く必要はなく、正準量子化が乗り上げた障害を突破できるように見える。たしかに、経路積分公式を書くことは簡単にできる。しかし、それ以上には進まない。普通、経路積分を何とか実行できるのは、ラグランジュアンが多項式の場合である。Born-Infeld場のラグランジュアンは極めて複雑であるため、経路積分を実行することはできない—少なくとも極めて困難である。

正準量子化や経路積分量子化でできないことも、確率過程量子化ではできるのではないか！　少なくともトライする価値はあるのではないか！

このような目論見をもって Born-Infeld 場の確率過程量子化を試みようというのである。まだ試みの段階にある未完成品だ。

4．1 (a) 古典論—静電場

通常の電磁場のラグランジュアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \tag{53}$$

である。ただし、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。作用汎関数は

$$\mathcal{S} = \int d^4x\mathcal{L}\ . \tag{54}$$

記号は自明のこととして説明しない。なお、ここではまだミンコフスキー測度を用いている。

球対称静電場に対しては、

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0(r), \qquad \mathbf{H} = 0 \tag{55}$$

であり、原点におかれた点電荷 e に対応する解

$$A_0 = \frac{e}{r} \tag{56}$$

は $r \to 0$ に応じて ∞ となる。よく知られた初歩的な事実だ。

さて、Born-Infeld 場の作用は

$$\mathcal{S}_B = \int d^4x \left[-b^2 \sqrt{1 - \frac{2}{b^2}\mathcal{L}} + b^2 \right] \tag{57}$$

で与えられる。$1/\sqrt{b}$ は自然単位で長さの次元をもつ普遍定数であり、"universal length"と呼ばれている。$b \to \infty$ のとき $\mathcal{S}_B \to \mathcal{S}$ となり、Born-Infeld 場は普通の電磁場に移行する。

いま、(55) を用いて、$A_0(r)$ に対する方程式を導けば、

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\frac{\partial}{\partial r}A_0(r)}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}(\frac{\partial}{\partial r}A_0(r))^2}} \right] = 0 \tag{58}$$

となるが、その解は

$$A_0 = \frac{e}{r_0}\int_{r/r_0}^{\infty} d\xi \frac{1}{\sqrt{1+\xi^4}} \to \begin{cases} (e/r)\,, & \text{for } r \gg r_0 \\ 1.8541 \cdot (e/r_0) & \text{for } r \to 0 \end{cases} \tag{59}$$

であり、たしかに静電自己エネルギーの発散はない。ただし、$r_0 = \sqrt{|e|/b}$。もちろん、$b \to \infty$ で元の無限大に戻る。これ以上静電解に深入りすることは止める。

"universal length"の発想は Heisenberg に始まる。物理学は普遍定数としてプランク定数 $\hbar$ と光速度 c をもっていたが、これだけではすべての物理量の次元を表すことはできない。$\hbar = c = 1$ という値をとる自然単位系では、長さの次元だけが不定のまま残るのはそのためである。新しく長さの次元をもつ "universal length"が普遍定数として加われば、すべての次元が決まる。Heisenberg はその "universal length"の効果によって、場の量子論発散が消えると予想したのである。この予想に応じて出てきたのが Born-Infeld 場であった。ただし、Heisenberg の期待はまだ実現されていない。

4．2 (b) 古典解—波動ゲージ

私が興味をもつのは遠くまで伝搬することのできる波動場である。$\mathcal{S}_B$ の Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\delta \mathcal{S}_B}{\delta A_\nu(x)} = \partial_\mu \left[\frac{F^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2b^2}F^2}} \right] = \partial_\mu \left[\frac{F^{\mu\nu}}{\chi} \right] = 0\,, \tag{60}$$

または

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu \ln\chi)F^{\mu\nu} \tag{61}$$

となる。ただし、$F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \chi = \sqrt{1+\frac{1}{2b^2}F^2}$。

この方程式の右辺は $1/b^2$ に比例し、$1/b^2$ のベキ級数に展開することができる。非摂動項は、いうまでもなく、自由マックスウエル場の方程式$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ である。したがって、摂動論を展開するにあたって、波動ゲージ

$$A_0 = 0\ , \quad \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{62}$$

を選ぶことができる。以下では、確率過程量子化による非摂動的計算を実行するのであるが、このゲージ選択が有効であるとして話を進めよう。

4．3 確率過程量子化

さて、$z = x_3$ に沿っての伝搬をとり上げることにし、

$$\begin{aligned} A_0 &= 0\ , && (63)\\ A_3 &= 0\ , && (64)\\ A_1 &= A_1(x_0,x_3) && (65)\\ A_2 &= A_2(x_0,x_3) && (66)\\ & && (67) \end{aligned}$$

とおく。ユークリッド化した作用は

$$S_E = \int dx_0 dx_3 \left[b^2\sqrt{1+\frac{1}{2b^2F_E^2}} - b^2\right]\ . \tag{68}$$

ただし、$F_E^2 = 2\{(\partial_0 A_1)^2 + (\partial_3 A_1)^2 + (\partial_0 A_2)^2 + (\partial_3 A_2)^2\}$ 。古典的方程式は

$$\frac{\delta S_E}{\delta A_i(x)} = -\partial_0\left[\frac{\partial_0 A_i}{\sqrt{1+\frac{1}{2b^2}F_E^2}}\right] - \partial_3\left[\frac{\partial_3 A_i}{\sqrt{1+\frac{1}{2b^2}F_E^2}}\right] = 0\ , \quad (i=1,2) \tag{69}$$

となる。なお、場 A_i と b の次元が元の次元と違っていることに注意してほしい。この古典的方程式を出発点にした確率過程量子化のランジュバン方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}A_i(x_0,x_3,t) = \partial_0\left[\frac{\partial_0 A_i}{\sqrt{1+\frac{1}{2b^2}F_E^2}}\right] + \partial_3\left[\frac{\partial_3 A_i}{\sqrt{1+\frac{1}{2b^2}F_E^2}}\right] + \eta_i(x_0,x_3,t)\ , \quad (i=1,2) \tag{70}$$

である。ただし、揺動力 η_i の統計的性質は

$$
\begin{aligned}
<\eta_i(x_0,x_3,t)>_\eta &= 0\ , &(71)\\
<\eta_i(x_0,x_3,t)\eta_j(x_0',x_3',t')>_\eta &= 2\delta_{ij}\delta(x_0-x_0')\delta(x_3-x_3')\delta(t-t') &(72)
\end{aligned}
$$

によって与えられる。いうまでもなく、求めるべきプロパゲーターは

$$
\Delta_{ij}(x_0-x_0',x_3-x_3') \equiv \lim_{t\to\infty} < A_i(x_0,x_3,t)A_j(x_0',x_3',t)>\ , \qquad (73)
$$

である。

プロパゲーターが求まれば何が分かるのか？　実はこれが分からない。通常の場であれば、

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ij}(0,x_3) &\overset{|x_3|\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{const.}\exp[-\mathcal{M}|x_3|]\ , &(74)\\
\Delta_{ij}(x_0,0) &\overset{|x_0|\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{const.}\exp[-\mathcal{M}'|x_0|] &(75)
\end{aligned}
$$

から、第 1 エネルギーギャップまたは粒子質量（$\mathcal{M}$、$\mathcal{M}'$）が得られる（(24) 参照)。しかし、Born-Infeld 場の場合はプロパゲーターの漸近形から、これらの量が得られるという理論的保証または裏付けがない。この問題は今研究中であるが、ここでは、ひとまず、通常の理論の期待をそのまま使って計算を進めよう。

さて、ランジュバン方程式 (70) を解析的に解くことは、もちろん、むずかしい。そこで、この方程式を離散化して、場に周期的境界条件を与え、数値計算によってプロパゲーターを求める。具体的にはランジュバンソース法を用いる（[1] 参照）。b^{-1} をパラメーターとして計算したプロパゲーターは図 1 の通りである。これから $\mathcal{M}$ または $\mathcal{M}'$ を求めれば、図 2 および図 3 のようになる。この結果は、b^{-1} と $\mathcal{M}$ または $\mathcal{M}'$ とが簡単な比例関係にあることを示唆しているようだ。なお、$b^{-1}=0$ 場合、Born-Infeld 場は通常のマックスウエル場に戻るはずだが、ちょうどそれに対応して、$\mathcal{M}=0$ または $\mathcal{M}'=0$ が出てきている。

このような結果が物理的には何を意味するのか？　残念ながら、まだ何もいえない。ともかく完全にゲージ不変な理論から質量らしきものが出てきたことは面白いと考えている。もちろん、質量次元をもつ普遍定数 b の導入がその直接の原因である。

なお、Δ_{ij} はゲージ依存量 A_i のプロパゲーターである。当然、場 $F_{\mu\nu}$ そのもののプロパゲーターから同じようなことがいえるかという疑問が出てこよう。現在その計算をやっている。

5．おわりに

以上、第三の量子化法ともいうべき確率過程量子化の歴史的背景と概略を説明し、それを通常の量子化法（正準量子化、経路積分量子化）がうまく機能しないはずの特異系（底なし場および Born-Infeld 場）に適用して、一応の結果を得た。まだ完成しているとはいえないが、中間報告として披露しておきたい。皆様方のご助言やご批判を期待している。

この報告の背景には、私の研究室における１０年以上にわたった共同研究がある。各時期での協力者、とくに、大場一郎、岡野啓介、山中由也、中里弘道、田中覚、金長正彦の諸氏に感謝する。

文献

[1] M. Namiki, *Stochastic Quantization*, Springer, 1992, Heidelberg; M. Namiki and K. Okano ed. *Stochastic Quantization*, Prog. Theor. Phys. Supplement No. 111, 1993, Kyoto.

[2] S. Tanaka, M. Namiki, I. Ohba, M. Mizutani, N. Komoike and M. Kanenaga, Phys. Lett. 288B (1992) 129.

S. Tanaka, I. Ohba, M. Namiki, M. Mizutani, N. Komoike and M. Kanenaga, Prog. Theor. Phys. 89 (1993) 187.

M. Kanenaga, M. Mizutani, M. Namiki, I. Ohba and S. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 91 (1994) No. 3 印刷中.

なお、Steklov Mathematical Institute グループ（O.Zavialov, A. Kirillov など）との共著論文を準備中。

[3] 現在準備中。学会報告は次の通り：

Born-Infeld 型非線形電磁場の確率過程量子化, 日本物理学会 1993 年秋の分科会, 1993 年 9 月.

Born-Infeld 型非線形電磁場の確率過程量子化 II, 日本物理学会第 49 回年会, 1994 年 3 月.

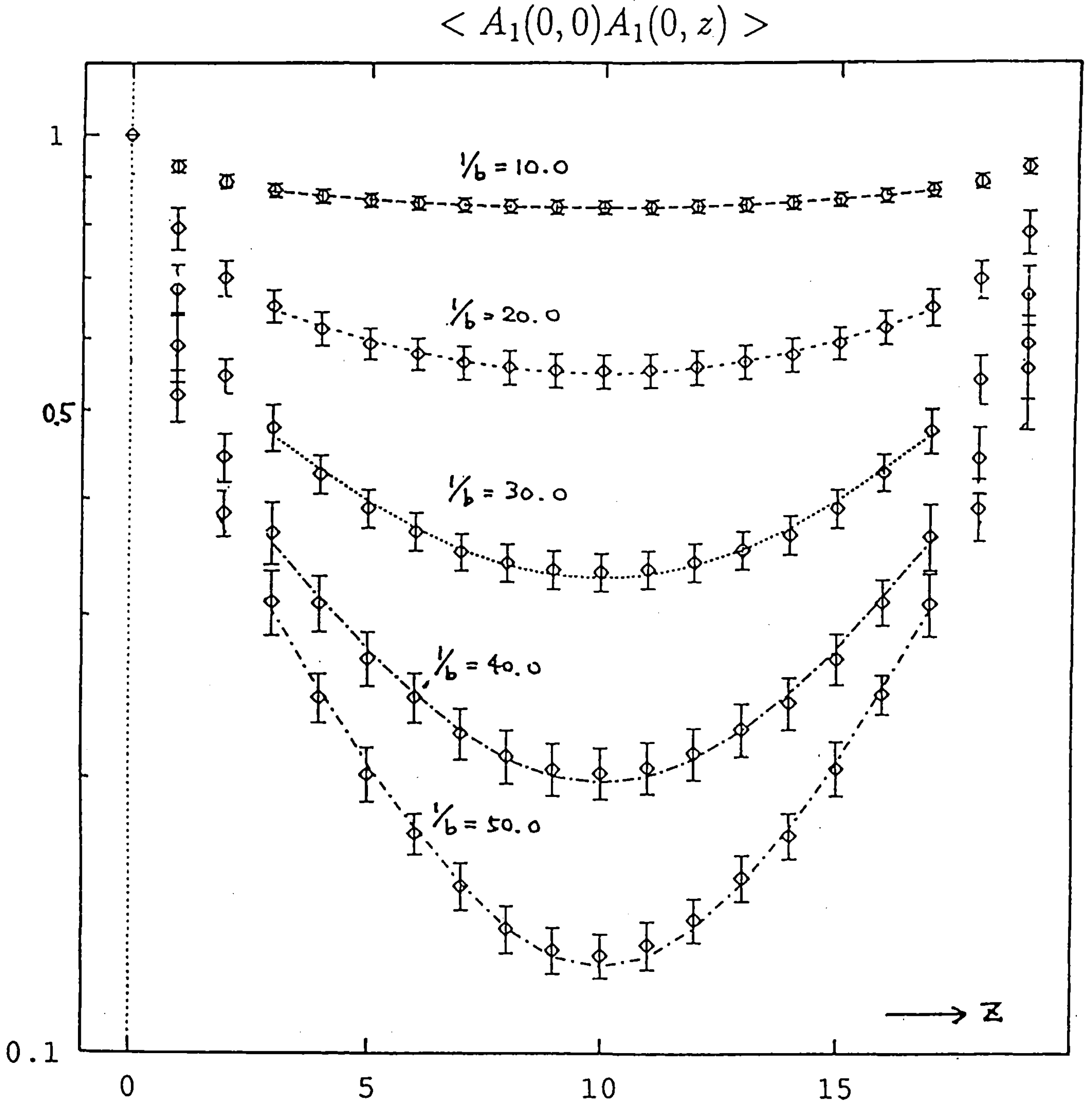
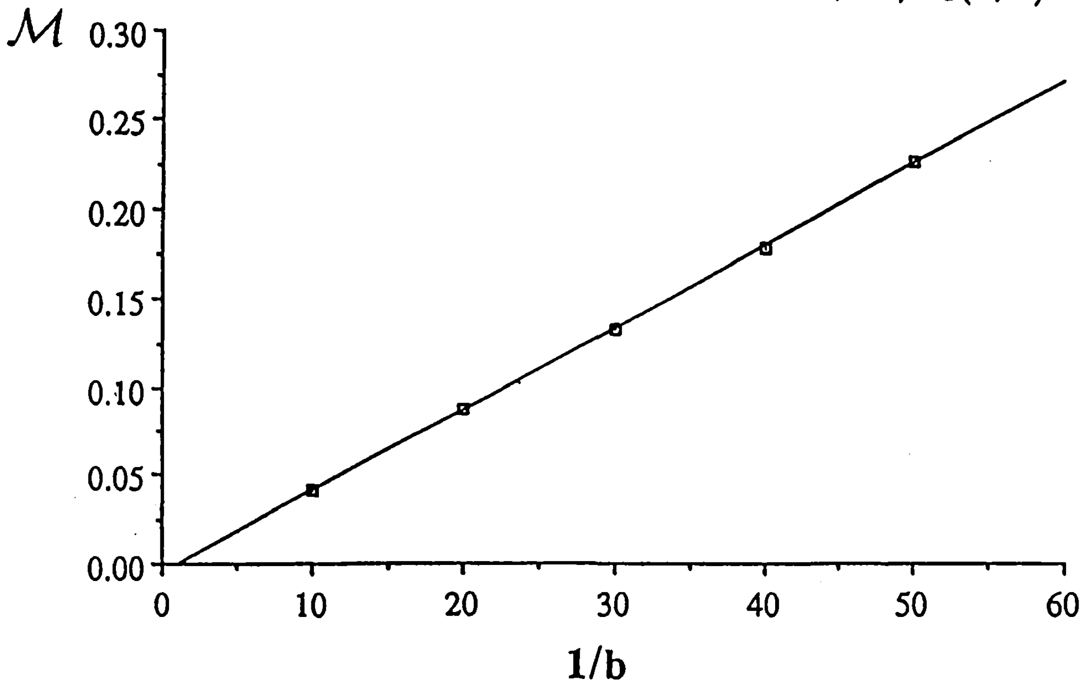


図 1

第１エネルギーギャップ $\mathcal{M} < A_1(0,0)A_1(0,z) >$



第１エネルギーギャップ $\mathcal{M} < A_2(0,0)A_2(0,z) >$

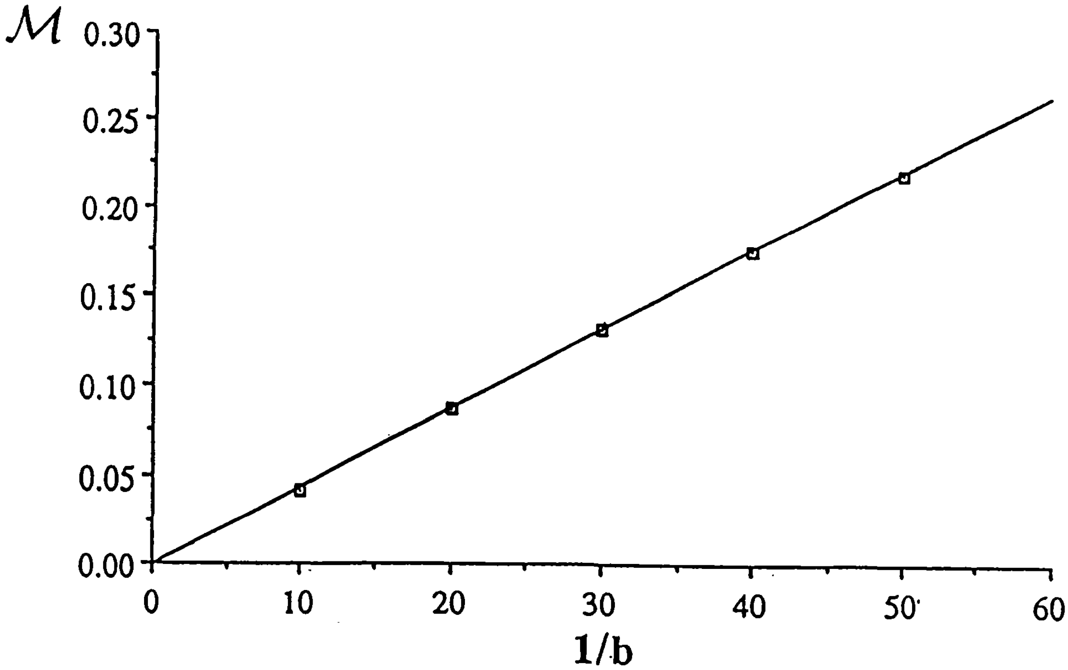
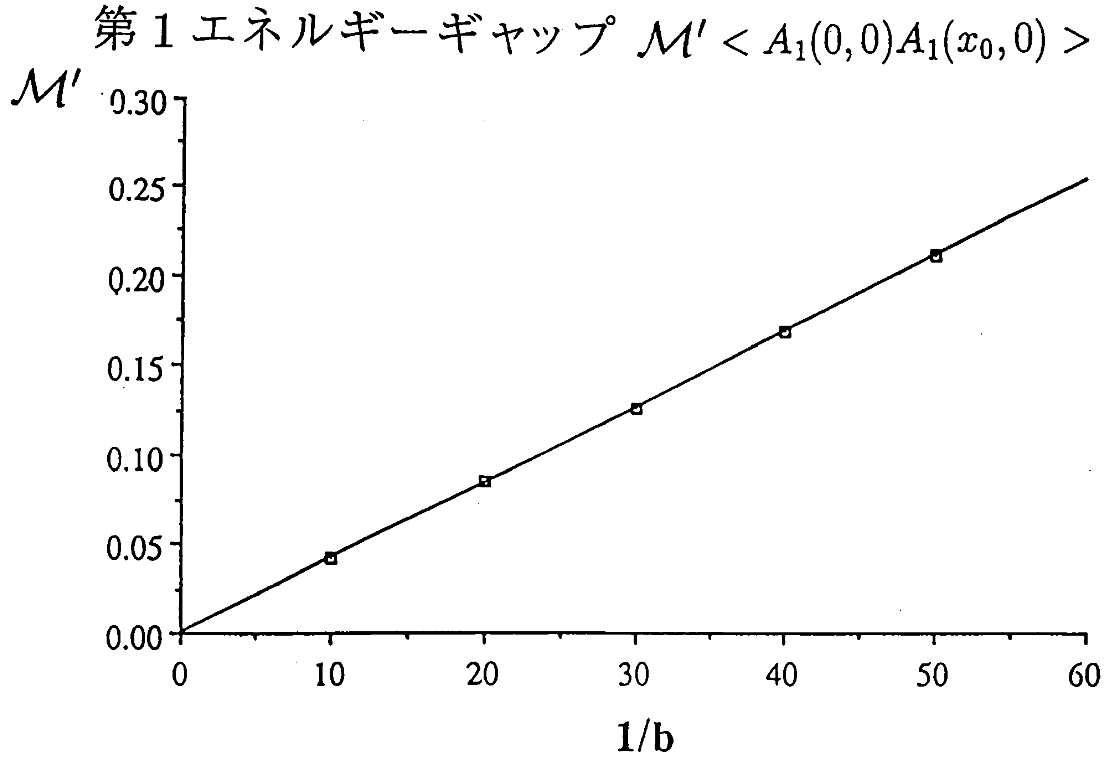


図　2


第1エネルギーギャップ $\mathcal{M}' < A_1(0,0)A_1(x_0,0) >$
$\mathcal{M}'$
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
10
20
30
40
50
60
1/b

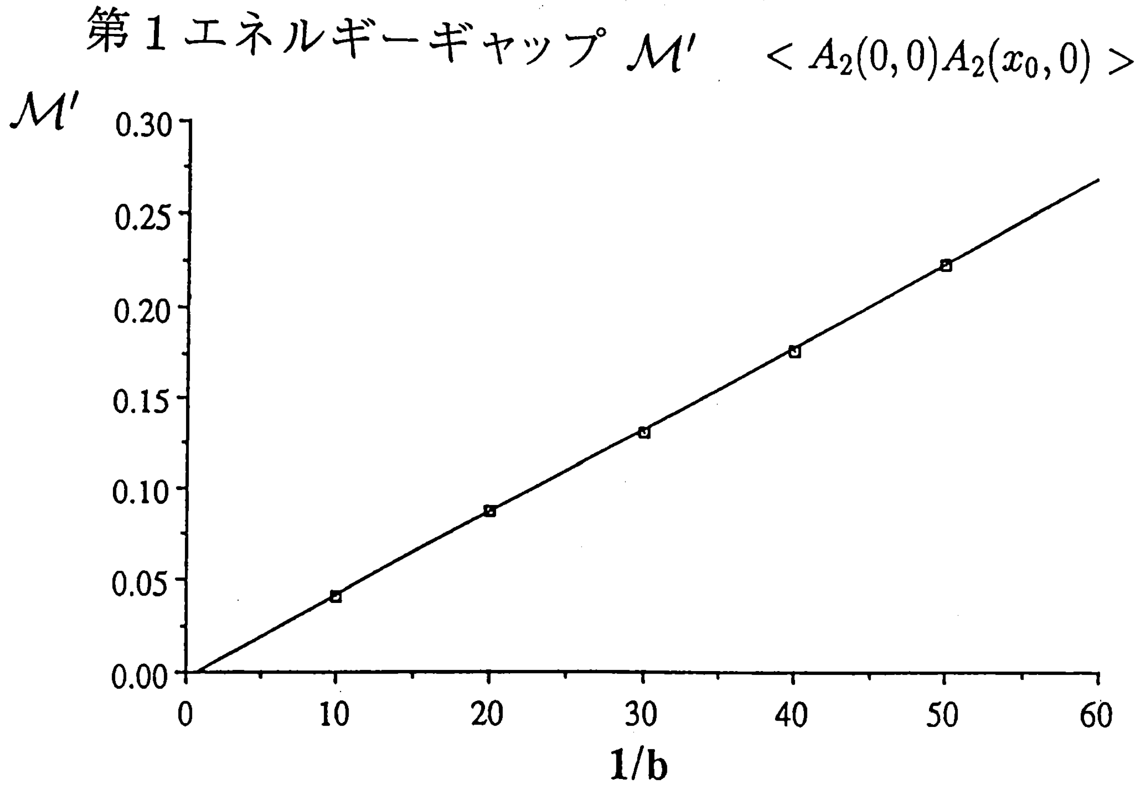

第1エネルギーギャップ $\mathcal{M}'$ $< A_2(0,0)A_2(x_0,0) >$
$\mathcal{M}'$
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
10
20
30
40
50
60
1/b

図 3